

МАТЕМАТИКА 1

ЛЕКЦИЈА 7

2 – Л7.1 ОСНОВНЕ ТЕОРЕМЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА

Ролова теорема

Теорема (Ферма-ова). Нека је реална функција f диференцијабилна у тачки x_0 и нека је x_0 тачка локалног екстремума функције f . Тада је $f'(x_0) = 0$. Доказ – на вежбама (АГ).

Теорема (Ролова). Нека је реална функција f дефинисана (бар) на сегменту $[a, b]$ и нека испуњава услове:

- (i) f је непрекидна на сегменту $[a, b]$;
- (ii) f је диференцијабилна у отвореном интервалу (a, b) ;
- (iii) $f(a) = f(b)$.

Тада постоји $c \in (a, b)$ такво да је $f'(c) = 0$. Доказ – на вежбама (АГ).

Геометријска интерпретација: График функције f која испуњава услове (i) – (iii), бар у једној тачки над интервалом (a, b) има тангенту паралелну x -оси.

Лагранжова теорема

Теорема (Лагранжова). Нека је реална функција f дефинисана (бар) на сегменту $[a, b]$ и нека испуњава услове:

- (i) f је непрекидна на сегменту $[a, b]$;
- (ii) f је диференцијабилна у отвореном интервалу (a, b) .

Тада постоји $c \in (a, b)$ такво да је $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Доказ – на вежбама

(АГ). *Геометријска интерпретација:* График функције f која испуњава услове (i) – (ii) има бар једну тачку над интервалом (a, b) у којој је тангента паралелна сечици кроз тачке $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Теорема. (Последица Лагранжове теореме) Нека функција f испуњава услове (i) – (ii) и нека је $f'(x) = 0$ за сваки $x \in (a, b)$. Тада је функција f константна на интервалу $[a, b]$, тј. постоји број C такав да је $f(x) = C$ за сваки $x \in [a, b]$. Доказ – на вежбама (АГ).

Кошијева теорема

Теорема (Кошијева). Нека су функције f и g дефинисане (бар) на сегменту $[a, b]$ и нека испуњавају следеће услове:

- (i) f и g су непрекидне на сегменту $[a, b]$;
- (ii) f и g су диференцијабилне у отвореном интервалу (a, b) ;
- (iii) $g'(x) \neq 0$ за сваки $x \in (a, b)$.

Тада постоји $c \in (a, b)$ такво да је $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Доказ – на вежбама (АГ). *Геометријска интерпретација* – иста као за Лагранжову теорему, само што се сада посматра график функције $y = h(x)$ задате параметарски на следећи начин:

$$x = g(t), \quad y = f(t), \quad t \in [a, b].$$

2 – Л7.2 ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈЕ ПОМОЋУ ИЗВОДА

Испитивање монотоности и налажење тачака локалних екстремума

Теорема. Нека је функција f непрекидна на сегменту $[a, b]$ и диференцијабилна у интервалу (a, b) . Ако је $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) за сваки $x \in (a, b)$, тада је f строго растућа (строго опадајућа) на сегменту $[a, b]$. Доказ – примена Лагранжове теореме, на вежбама (АГ).

Ова теорема може да се "локализује", што је учињено у следећој леми (помоћној теорему).

Лема 1. Ако је функција f диференцијабилна у тачки $x_0 \in \overset{\circ}{D}_f$ и ако је притом $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), тада постоји базична околина $B[x_0, r]$ тачке x_0 , таква да је $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) ако је $x < x_0$, а $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$) ако је $x > x_0$, за $x \in B[x_0, r]$. Доказ – количник $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, који тежи ка $f'(x_0)$ кад $x \rightarrow x_0$, има исти знак као $f'(x_0)$ у некој пунктираној базичној околини тачке x_0 .

Ова лема може да се искаже овако: под наведеним условима, из позитивности (негативности) извода функције f у тачки x_0 следи да функција "расте (опада) у тачки x_0 ".

Обрнуто, какав је извод монотоне диференцијабилне функције?

Теорема. Нека је функција f непрекидна на сегменту $[a, b]$ и диференцијабилна у интервалу (a, b) . Ако је притом f растућа (опадајућа) на сегменту $[a, b]$, тада је $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) за сваки $x \in (a, b)$. Доказ – количник $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ је ненегативан (непозитиван) за $x, x_0 \in (a, b)$, $x \neq x_0$, па је такав и извод $f'(x_0)$, као гранична вредност тог количника кад $x \rightarrow x_0$.

Стационарна тачка функције – тачка у којој је извод те функције једнак нули. Раније установљена Ферма-ова теорема тврди: један потребан услов да тачка x_0 буде тачка локалног екстремума функције f (диференцијабилне у тој тачки) јесте да x_0 буде стационарна тачка функције f . Наредне три теореме дају довољне услове да функција има локални екстремум у некој тачки.

Теорема. Нека је функција f непрекидна у тачки $x_0 \in \overset{\circ}{D}_f$ и диференцијабилна у некој пунктираној базичној околини $B(x_0, r)$ тачке x_0 . Ако је притом $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) за $x \in (x_0 - r, x_0)$, а $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) за $x \in (x_0, x_0 + r)$, тада функција f има локални максимум (локални минимум) у тачки x_0 . Доказ – непосредно на основу прве од горњих теорема.

Ова теорема може да се исказе овако: под наведеним претпоставкама о функцији f , ако изводна функција f' функције f , "при проласку x кроз x_0 ", мења знак од "+" на "-" (од "-" на "+"), тада функција f има локални максимум (локални минимум) у тачки x_0 .

Теорема. Ако функција f има други извод у тачки $x_0 \in \overset{\circ}{D}_f$ и ако је притом $f'(x_0) = 0$ а $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), тада функција f има локални максимум (локални минимум) у тачки x_0 . Доказ – примена леме 1 на изводну функцију f' , а затим примена претходне теореме (на функцију f).

У овој теорему може претпоставка да се измени тако да и други извод буде једнак нули у тачки x_0 , али да у оближњим тачкама буде негативан (позитиван), при чему теорема остаје на снази. Тако се добија следећа лема.

Лема 2. Нека функција f има други извод у некој базичној околини $B[x_0, r)$ тачке x_0 , и нека је $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$. Ако је притом $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) за $x \in B(x_0, r)$, тада функција f има локални максимум (локални минимум) у тачки x_0 . Доказ – примена прве од горњих теорема (тј. теореме о вези монотоности функције и знака њеног првог извода) на изводну функцију f' на интервалу $(x_0 - r, x_0)$ и на интервалу $(x_0, x_0 + r)$, а затим примена (на функцију f) теореме о промени знака изводне функције "при проласку x кроз x_0 ".

Ова лема и претходна теорема могу да се уопште тако да се други извод замени било којим изводом парног реда. Најпре уопштавамо лему.

Лема 3. Нека је n неки природни број, нека функција f има $2n$ -ти извод у некој базичној околини $B[x_0, r)$ тачке x_0 , и нека је $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0$. Ако је притом $f^{(2n)}(x) < 0$ ($f^{(2n)}(x) > 0$) за $x \in B(x_0, r)$, тада функција f има локални максимум (локални минимум) у тачки x_0 . Доказ – индукција по n , уз примену леме 2.

(Заправо, у овој лемии није битно да буде $f^{(2n)}(x_0) = 0$. Може $f^{(2n)}(x_0)$ и да не постоји. Исто важи и за $f''(x_0)$ у лемии 2.)

Теорема. Ако функција f има $2n$ -ти извод у тачки $x_0 \in \overset{\circ}{D}_f$ ($n \in \mathbb{N}$) и ако је притом $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ а $f^{(2n)}(x_0) < 0$ ($f^{(2n)}(x_0) > 0$), тада функција f има локални максимум (локални минимум) у тачки x_0 . Доказ – примена претходне теореме на функцију $f^{(2n-2)}$, а затим, ако је $n > 1$, примена леме 3, са $n-1$ уместо n , на функцију f .

Ако функција, непрекидна на неком интервалу, има коначно много локалних екстремума на том интервалу, онда се локални максимуми и локални минимуми наизменично нижу. Ово се доказује тако што се, применом друге Вајерштрасове теореме, покаже да се између свака два локална максимума налази неки локални минимум, и између свака два локална минимума неки локални максимум.

Нека је функција f непрекидна на сегменту $[a, b]$ и диференцијабилна у интервалу (a, b) , и нека се тражи максимум (минимум) функције f на сегменту $[a, b]$. Ако је $f(x_0)$ тражени максимум (минимум) и x_0 је унутрашња тачка сегмента $[a, b]$, онда је x_0 једна стационарна тачка функције f , према Ферма-овој теореме. Према томе, треба упоредити вредности функције f у њеним стационарним тачкама на сегменту $[a, b]$ са вредностима које функција узима у крајевима тог сегмента. Највећа (најмања) од свих тих вредности је тражени максимум (минимум).

Испитивање конвексности функције и налажење превојних тачака њеног графика.

Ако је конвексна функција диференцијабилна, какав је њен извод? Следећа теорема садржи одговор на то питање.

Теорема. Нека је функција f дефинисана и непрекидна на интервалу I , и нека је f диференцијабилна у отвореном интервалу $\overset{\circ}{I}$. Потребан и довољан услов да f буде конвексна (конкавна) на I јесте да изводна функција f' буде неоппадајућа (нерастућа) на $\overset{\circ}{I}$. Доказ – на вежбама (АГ).

Ако у овој теореме f' строго расте (строго опада) на интервалу $\overset{\circ}{I}$, тада је f строго конвексна (строго конкавна) на I . Важи и обрнуто.

Постоји једноставна веза конвексности функције и знака њеног другог извода. Наредна теорема говори о томе.

Теорема. Нека је функција f дефинисана и непрекидна на интервалу I , и нека она има други извод у отвореном интервалу $\overset{\circ}{I}$. Потребан и довољан услов да f буде конвексна (конкавна) на I јесте да буде $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) за $x \in \overset{\circ}{I}$. Доказ – примена претходне теореме на функцију f и ранијих теорема о вези монотоности функције и знака њеног првог извода на изводну функцију f' .

Ако је у овој теореме $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) за $x \in \overset{\circ}{I}$, тада је функција f строго конвексна (строго конкавна) на I . Обрнуто не важи.

Још једна *геометријска интерпретација конвексности функције*. Нека је функција f непрекидна на интервалу I и диференцијабилна у отвореном интервалу $\overset{\circ}{I}$. Тада је f строго конвексна (строго конкавна) на I ако и само ако све тачке њеног графика над интервалом I леже изнад (испод) било које његове тангенте, изузев што је додирна тачка на тангенти. Доказ – на вежбама (АГ).

Превојна тачка графика функције f – тачка $(x_0, f(x_0))$ на графику функције f за коју постоји базична околина $B[x_0, r)$ тачке x_0 таква да је f на интервалу $(x_0 - r, x_0]$ конвексна а на интервалу $[x_0, x_0 + r)$ конкавна, или обрнуто, на интервалу $(x_0 - r, x_0]$ конкавна а на интервалу $[x_0, x_0 + r)$ конвексна.

Ако је $(x_0, f(x_0))$ превојна тачка графика функције f и ако постоји $f''(x_0)$, тада мора бити $f''(x_0) = 0$. Ово следи из теореме о вези конвексности функције и монотоности њеног првог извода, и Ферма-ове теореме примењене на функцију f' . Дакле, услов $f''(x_0) = 0$ је потребан да тачка $(x_0, f(x_0))$ буде превојна тачка графика функције f .

Ако за функцију f и тачку $x_0 \in \overset{\circ}{D}_f$ постоји нека базична околина $B[x_0, r)$ тачке x_0 таква да је f непрекидна на $B[x_0, r)$ а у $B(x_0, r)$ има други извод који мења знак "при проласку x кроз x_0 ", тада је тачка $(x_0, f(x_0))$ превојна тачка графика функције f . Ово следи из теореме о вези конвексности функције и знака њеног другог извода. Дакле, услов да други извод функције f мења знак "при проласку x кроз x_0 " је довољан да тачка $(x_0, f(x_0))$ буде превојна тачка графика функције f .

Ако у горњем ставу постоји и $f'''(x_0)$ и ако је $f''(x_0) = 0$ а $f'''(x_0) \neq 0$, тада ће други извод $f''(x)$ мењати знак "при проласку x кроз x_0 ", па ће тачка $(x_0, f(x_0))$ бити превојна тачка графика функције f . Ово може и да се уопшти тако да се трећи извод замени било којим изводом непарног реда, изузев првог. Тако се добија следећа теорема.

Теорема. Нека функција f има $2n+1$ -ви извод у тачки $x_0 \in \overset{\circ}{D}_f$, за неки природни број n . Ако је притом $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0$ а $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, тада је тачка $(x_0, f(x_0))$ превојна тачка графика функције f . Доказ – примена теореме о довољном услову за постојање екстремума преко виших извода на функцију f''' (ако је $n > 1$), а затим примена теореме о вези монотоности функције и знака њеног првог извода на функцију f'' , да би се показало да други извод функције f мења знак "при проласку x кроз x_0 ".

Налажење асимптота графика

Дефиниција асимптоте. Нека је крива C у равни Oxy задата једначином $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, при чему је f једна непрекидна функција. Кажемо да крива C *допире у бесконачност* кад $x \rightarrow a+$, односно кад $x \rightarrow b-$, ако $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ кад $x \rightarrow a+$, односно кад $x \rightarrow b-$, при чему је тачка (x, y) на кривој C , тј. $x \in (a, b)$ и $y = f(x)$. Притом се *асимптотом криве C* кад $x \rightarrow a+$, односно кад $x \rightarrow b-$, назива свака права p у равни Oxy таква да растојање тачке $M(x, y) \in C$ од праве p тежи нули кад $x \rightarrow a+$, односно кад $x \rightarrow b-$. У случају да се права p може задати једначином облика $y = kx + l$ ($k, l \in \mathbf{R}$), она се назива *косом асимптотом* (специјално,

горизонталном ако је $k = 0$), а у случају да је њена једначина облика $x = x_0$ ($x_0 \in \mathbf{R}$) — вертикалном асимптотом.

Теорема. Крива $C: y = f(x)$, $x \in (a, +\infty)$ ($x \in (-\infty, b)$), има косу асимптоту кад $x \rightarrow +\infty$ (кад $x \rightarrow -\infty$) ако и само ако постоје граничне вредности

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \right)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = l \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = l \right).$$

Ако ове граничне вредности постоје, тада (и само тада) је права $p: y = kx + l$ коса асимптота криве C кад $x \rightarrow +\infty$ (кад $x \rightarrow -\infty$). Доказ — на вежбама (АГ).

Специјално, ако у горњој теорему постоји гранична вредност $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$), тада (и само тада) је права $p: y = l$ хоризонтална асимптота криве C кад $x \rightarrow +\infty$ (кад $x \rightarrow -\infty$).

Теорема. Крива $C: y = f(x)$, $x \in (a, b)$, има вертикалну асимптоту кад $x \rightarrow a+$ (кад $x \rightarrow b-$) ако и само ако је $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$ ($\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \pm\infty$).

Ако је $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$ ($\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \pm\infty$), тада (и само тада) је права $p: x = a$ ($p: x = b$) вертикална асимптота криве C кад $x \rightarrow a+$ (кад $x \rightarrow b-$). Доказ — на вежбама (АГ).

График функције се обично састоји од коначно много кривих какве смо управо размотрили.